Ersatzarbeit

für die Stunde vom

22.8.2012

Zeitwert: Ca. eine Schulstunde plus Hausaufgabenzeit

Thema:

Unterbestimmte Gleichungssysteme

Bitte ausfüllen:

Bearbeitungszeit: ___________________

Fehler ____

Fragen: ____

Bemerkung zu Beispielaufgaben und Verständlichkeit des Skripts:

____

____

____

Unterbestimmte Gleichungssysteme

Die bisherigen Gleichungssysteme waren lösbar, da genauso viele Gleichungen wie Unbekannte (Variablen) gegeben waren, also folgendermaßen aussahen:

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3$

$3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 12$ bzw. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 12 \\ 2 & 9 & 8 & 5 \end{array}\right)$

$2x_1 + 9x_2 + 8x_3 = 5$

Wie sagen m Gleichungen mit n Unbekannten, wobei ein Gleichungssystem genau dann eindeutig lösbar ist, wenn gilt $m = n$.

Anmerkung: Eindeutig lösbar ist ein Gleichungssystem auch dann, wenn es keine Lösung gibt, also IL = { }.

Was gilt aber für die anderen Fälle: 1. Fall: $m < n$ und 2. Fall: $m > n$?

In diesem Skript beschäftigen wir uns mit dem 1. Fall: $m < n$.

Wir haben also weniger Gleichungen als Unbekannte bzw. mehr Variablen als Gleichungen. Gleichungssysteme dieser Art sehen folgendermaßen aus:

I $\quad x_1 + x_2 + x_3 = 7$

II $\qquad x_2 - 2x_3 = 0$

Vorgehen: Da sich die Matrizenrechnung hier nicht anbietet, geht man folgendermaßen vor:

Man wendet zunächst das Gleichsetzungs-, Einsetzungs- oder Additionsverfahren an. Dann wählt man für eine Variable einen beliebigen Wert und ermittelt, wie die anderen beiden Variablen aussehen müssen.

I $\quad x_1 + x_2 + x_3 = 7$

II $\qquad x_2 = 2x_3$

II in I $x_1 + 2x_3 + x_3 = 7$

Nun wähle z.B. für $x_3 = 1$. Dann ergibt sich folgende Gleichung: $x_1 + 3 = 7 \mid -3$ ➔

$x_1 = 4$. Eingesetzt in II ergibt sich: $x_2 = 2 \cdot 1 = 2$. Damit haben wir eine Lösung gefunden:

$IL = \{(4 ; 2 ; 1)\}$

Diese Lösung war abhängig von $x_3 = 1$. Da man natürlich auch einen anderen Wert hätte nehmen können, gibt es unendlich viele Lösungen. Daher kann man eine Lösung auch allgemein angeben.

Sei $x_3 = c$

Mit $x_2 = 2x_3$ folgt daraus $x_2 = 2c$

Mit $x_1 + x_2 + x_3 = 7 \Rightarrow x_1 + 2c + c = 7 \Rightarrow x_1 + 3c = 7 \Rightarrow x_1 = 7 – 3c$

$IL = \{(7\text{-}3c ; 2c ; c)\}$

Was genau gefordert ist, hängt von der Aufgabenstellung ab. Wird nach einer konkreten Lösung, bzw einem Beispiel für eine Lösung gefragt, gibt man ein konkretes Zahlenbeispiel an. Ansonsten muss man die allgemeine Form mit Variablen angeben.

Ein weiteres Beispiel:

I $\quad 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 4$

II $\quad x_1 - 3x_2 + x_3 = -2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3x_2 - x_3 -2$

II in I $\quad 2(3x_2 - x_3 -2) + 3x_2 - 3x_3 = 4 \Rightarrow 6x_2 - 2x_3 -4 + 3x_2 - 3x_3 = 4 \Rightarrow 9x_2 - 5x_3 = 8$

$9x_2 = 5x_3 +8$ Nun muss man für x_3 eine Variable bestimmen oder eine konkrete Zahl auswählen. In diesem Fall bietet sich an $x_3 = 2$, da $5 \cdot 2+ 8$ durch 9 teilbar ist und für x_2 eine „schöne“ Zahl herauskommt.

Also $x_3 = 2 \Rightarrow 9x_2 = 5·2 + 8 \Rightarrow 9x_2 = 5 \cdot 2 + 8 \Rightarrow 9x_2 = 18 \Rightarrow x_2 = 2$.

x_2 und x_3 eingesetzt in I ergibt: $x_1 – 3 \cdot 2 + 2 = -2 \Rightarrow x_1 – 4 = -2 \Rightarrow x_1 = 2$.

$IL = \{(2 ; 2 ; 2)\}$ oder allgemein $IL = \{(c ; c ; c)\}$.

Übungsaufgaben

Gib eine mögliche Lösung für die Gleichungssysteme an und vergleiche mit dem gegebenen Lösungsbeispiel:

a) I $\quad x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$

II $\quad x_2 - 3x_3 = -1 \qquad IL = \{(5 ; 2 ; 1)\}$

b) I $\quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8$

II $\quad 2x_1 - 3x_2 = 13 \qquad IL = \{(5 ; 2 ; 1)\}$